Cours 7.1
29.10.24

Cette semaine :

1 exercices supplém. facultatifs à rendre sur Moodle

2 répondre sondage test intermédiaire < oui / non

— " " " " < où ? / quand ?

[semaine 10]

Rappel

Théorème 4.3.6 : Soit $T : V \to W$ transfo linéaire alors

espaces vectoriels

- $\mathrm{Ker}(T)$ est un S.E.V de V
- $\mathrm{Im}(T)$ est un S.E.V. de W

de plus

a) T est injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$

b) T est surjective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(T) = W$.

démo de 4.3.6 a)

$T : V \to W$ $\boxed{\text{linéaire}}$

à montrer $Ker(T) = \{0_V\} \Leftrightarrow T$ est injective.

$\Rightarrow$) supposons $Ker(T) = \{0_V\}$
et montrons que T est injective.

soient $x, y \in V$ tels que $T(x) \overset{*}{=} T(y)$
on doit montrer que $x = y$.

$* \Rightarrow T(x) - T(y) = 0_W$

W espace vectoriel

$$\|$$

comme T est linéaire $\quad T(x-y) = 0_W$

$$\left(\begin{array}{l} T(u+v) = T(u) + T(v) \\ T(\lambda u) = \lambda T(u) \end{array} \right)$$

d'après l'hypothèse ($Ker(T) = \{0_V\}$)

on doit avoir $x - y = 0_V$ (car $x-y \in Ker(T)$)

$\Rightarrow$ V esp. vect. $\quad x = y \quad$ cqfd $\Rightarrow$)

$(\Leftarrow)$ Supposons que T soit injective et montrons que $Ker(T) = \{0_V\}$

Soit $x \in Ker(T)$, par définition

$$T(x) = 0_W$$

Mais T est linéaire et donc $T(0_V) = 0_W$

donc $T(x) = 0_W = T(0_V)$

et par hypothèse, T est injective, donc

$x = 0_V$. Donc $Ker(T) = \{0_V\}$

cqfd $(\Leftarrow)$

Remarque :

a) $\mathbb{R} \xrightarrow{T} \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$

- injective
- non linéaire
- "$Ker(T)$" $= \{-1\}$

b) $\mathbb{R} \xrightarrow{T} \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$

- injective
- non linéaire
- "$Ker(T)$" $= \emptyset$

c) $\mathbb{R} \xrightarrow{T} \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$

- injective
- $Ker(T) = \{0\}$
- pas linéaire

<u>Notation 4.3.7</u> : Pour $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

on note par $Ker(A) = Ker(T_A) \subseteq \mathbb{R}^n$

$Im(A) = Im(T_A) \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\left(\begin{array}{l} T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \quad\quad x \mapsto Ax \end{array} \right)$$

• $\underset{\text{s.e.v de } \mathbb{R}^n}{Ker(A)} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \}$

l'ens. des solutions du syst. homogène

• $\underset{\text{s.e.v de } \mathbb{R}^m}{Im(A)} = \{ \vec{b} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \, \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tq } A\vec{x} = \vec{b} \}$

= l'ens des $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ tq le système est "compatible"

càd le syst. possède au moins une solution

et $Im(A) = Col(A)$

= l'espace des colonnes de A

= toutes les C.L. des colonnes de A

$= \mathrm{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$

où $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$ est la $i^{ème}$ colonne de A

Exemples de transfo linéaires

4.3.8

Ker et Im

1) $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ $\quad T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$\quad\quad \vec{x} \mapsto A\vec{x}$

est linéaire

(+ voir remarque précédente)

2) $V = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ = l'espace des suites réelles

U = le sous-esp. des suites convergentes

(exercice d'analyse) : montrer que U est un s.e.v de V.

Regardons, la transformation

$$\lim : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$$

Analyse 1 dit que $(x_n), (y_n) \in U$ $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \\ \lim_{n\to\infty} (\lambda x_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n \end{cases}$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Donc $\lim : U \to \mathbb{R}$ est linéaire

$$\mathrm{Ker}(\lim) = \left\{ (x_n)_{n\in\infty} \in U \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$$

= toutes les suites qui convergent vers 0.

$$\mathrm{Im}(\lim) = \mathbb{R}$$

en effet, soit $r \in \mathbb{R}$, alors la suite constante $x_n = r$ $\forall n \in \mathbb{N}$ appartient à U et $\lim_{n\to\infty} x_n = r$. Donc $r \in \mathrm{Im}(\lim)$

. Ainsi $\mathrm{Im}(\lim) = \mathbb{R}$.

3) Soit $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ $W = M_{n\times m}(\mathbb{R})$

alors la transfo.

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) \xrightarrow{F} M_{n\times m}(\mathbb{R})$$
$$A \mapsto A^T$$

est linéaire $\left(\begin{array}{l} (A+B)^T = A^T + B^T \\ (\lambda A)^T = \lambda A^T \qquad \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right)$

$$\mathrm{Ker}(F) = \{ 0_{M_{m\times n}} \} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} \right\}$$

donc la transposée est bijective.

$$\mathrm{Im}(F) = ? = M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

car $(A^T)^T = A$ donc $A \in \mathrm{Im}(F)$

donc F est surjective. donc bijective

Théorème Utile 4.3.9

Soit $T : V \to W$ une T.L. Alors

a) Soit $U \subseteq V$ un s.E.V de V, alors

$$T(U) \overset{\text{déf}}{=} \{ w \in W \mid \exists u \in U \text{ avec } T(u) = w \}$$

est un s.E.V de W.

On l'appelle <u>l'image de U par T</u>

NB: lorsque $U = V$, alors $T(U) = \mathrm{Im}(T)$
(définie en semaine 6)

b) Soit $Z \subseteq W$ un s.E.V de W, alors

$$T^{*}(Z) \overset{\text{déf}}{=} \{ v \in V \mid T(v) \in Z \}$$

est un s.E.V de V appelé

<u>l'image réciproque de Z par T</u>

(ou la préimage de Z par T, $T^{-1}(Z)$)

<u>NB</u> : cas particulier $Z = \{0_W\}$, alors

$$T^*(\{0_W\}) = \{v \in V \mid T(v) \in \{0_W\}\}$$
$$= \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}$$
$$= \mathrm{Ker}(T)$$

<u>dém de a) après la pause :</u>

$T : V \to W$ T.L et $U \subseteq V$ un S.E.V de V

à montrer : $T(U) = \{w \in W \mid \exists u \in U \text{ t.q } T(u) = w\}$ est un S.E.V de W

1) Montrons que $0_W \in T(U)$

Comme U est un S.E.V de V

on a que $0_V \in U$

or T est linéaire et donc $T(0_V) = 0_W$

on a bien que $0_W \in T(U)$.

2) Mq si $w, w' \in T(U)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

alors $\lambda w + w' \in T(U)$.

Comme $w, w' \in T(\mathcal{U})$, il existe $u, u' \in \mathcal{U}$
tels que $T(u) = w$ et $T(u') = w'$

Alors $T(\lambda u + u') \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ linéaire}}}{=} \lambda T(u) + T(u') = \lambda w + w'$

or $\mathcal{U}$ est un s.e.v de V et donc
$\lambda u + u' \in \mathcal{U}$, ainsi $\lambda w + w' \in T(\mathcal{U})$. cqfd a)

b) en exercice (facultatif) à rendre

§ 4.4. Familles linéairement indépend. génératrices et bases d'E.V

Déf 4.4.1 : (déjà vu au chap. 1 pour $V = \mathbb{R}^n$)

Soit V un E.V et $v_1, \dots, v_p \in V$ $(p \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$

On dit que la partie (non ordonnée) $\{v_1, \dots, v_p\}$
(la famille ordonnée $(v_1, \dots, v_p)$)

est <u>linéairem. indépendante</u> (ou libre) si l'équation suivante dans V

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0_V$$

n'admet que la solution nulle :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0 \in \mathbb{R}$$

Dans le cas contraire on dit que $\{v_1, \dots, v_p\}$ est <u>liée</u> ou <u>linéairement dépendante</u>

<u>Ex</u> 4.4.2 :

0) $\{0_V\}$ est liée car $1 \cdot 0_V = 0_V$

0,5) $v \in V$ $\{v\}$ est lin. indep. $\Leftrightarrow v \neq 0_V$

1) Dans $V = \mathbb{R}^n$, des vect. $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}$ sont lin. indépendants

$\Leftrightarrow$ la matrice $A = \left(\vec{v_1} \mid \dots \mid \vec{v_p}\right)_{n \times p}$

possède un pivot par colonne càd p pivots.

Sous-exemple : $\mathbb{R}^4$ $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

indépendants

tandis que $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}$

sont dépendants

+ d'exemples dans le Chap. 1.

2) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$v_1(t) = \cos(t) \qquad v_2(t) = \sin(t)$

la partie $\{v_1, v_2\} \subset V$ est lin. <u>indép</u>

en effet

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

égalité de fonctions

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_V$$

càd $\forall t \in \mathbb{R}$ on a

$$\lambda_1 v_1(t) + \lambda_2 v_2(t) = 0_V(t) = 0_{\mathbb{R}}$$

$$\lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t) \overset{♥}{=} 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Prenons $t=0$ $\underset{t=0}{\leadsto}$ $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$ $\lambda_1 = 0$

$\cos(0) = 1$

$\sin(0) = 0$

Prenons $t = \frac{\pi}{2}$ $\underset{t=\frac{\pi}{2}}{\leadsto}$ $\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$ $\lambda_2 = 0$

$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$\Rightarrow$ la partie $\{\cos, \sin\}$ est lin. indép.

+ génér. $\{\cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots$

$\cos(nt), \sin(nt), \dots\}$

est linéairem. indép.

<u>Def</u> 4.4.4 : V un E.V et $W \subseteq V$ un S.E.V.

On dit que <u>$\{v_1, \dots, v_p\}$ engendre W</u>

si $W = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$.

<u>Rappel</u> : $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \mid \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$

c'est un S.E.V de V

Autre terminologie : $\{v_1, \dots, v_p\}$ est <u>partie génératrice</u> de W

si $W = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$

Déf. 4.4.5 : (Important)

Soit $W \subseteq V$ un S.E.V de V

On dit qu'une partie $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une <u>base de W</u> si

i) $\{v_1, \dots, v_p\}$ est lin. <u>indép.</u> (libre)

ii) $\{v_1, \dots, v_p\}$ engendre W

<u>Rem</u> : ii) $\Rightarrow v_i \in W \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}$

Une famille <u>ordonnée</u> $(v_1, \dots, v_p)$ est une <u>base ordonnée</u> si $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une base

<u>ex</u> : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^2$

$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \right)$ base ordonnée de $\mathbb{R}^2$

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ base ordonée de $\mathbb{R}^2$

Point de vue important (n'est pas dans le lay)

<u>Déf 4.4.6</u> : Soit $W \subseteq V$ un S.E.V et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille <u>ordonnée</u> de p vecteurs avec $v_i \in W$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$

On définit une transfo :

$$T : \mathbb{R}^p \longrightarrow W$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \longmapsto \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p$$

$\left(\in W \text{ car } W \text{ est un S.E.V} \right)$

appelée la <u>transfo. C.L des v_i</u>

(ou transfo COOL)

et elle vérifie les propr. suivantes

Théorème cool : $T : \mathbb{R}^p \to W$

4.47

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$

$(v_1, \dots, v_p)$ ordonnée dans cet ordre

vérifie

i) T est linéaire (exercice)

ii) $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$

iii) T est injective $\Leftrightarrow$ $\{v_1, \dots, v_p\}$ est lin. independ.

iv) T est surjective $\Leftrightarrow$ $\{v_1, \dots, v_p\}$ engendrent W

v) T est bijective $\Leftrightarrow$ $(v_1, \dots, v_p)$ est une base (ordonnée) de W